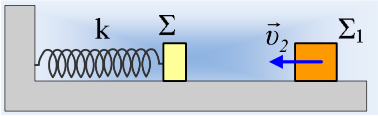
Μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης



Το σώμα Σ μάζας m=1kg εκτελεί ΑΑΤ σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, με πλάτος Α=0,5m.

i) Μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η ταχύτητα του σώματος Σ;

Ένα δεύτερο σώμα $Σ_1$ μάζας Μ=4kg κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα με ταχύτητα μέτρου $υ_2$=2m/s. Τα δυο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά σε μια θέση, με αποτέλεσμα το σώμα Σ να εκτελέσει μια νέα ταλάντωση με μέγιστο πλάτος.

ii) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του Σ μετά την κρούση.

iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του Σ ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.

iv) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.

Απάντηση:

i) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο:

$$\upsilon_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{100}{1}} \cdot 0{,}5m/s = 5m/s$$

Οπότε η ταχύτητα του σώματος Σ παίρνει τιμές $-5m/s \le \upsilon \le 5m/s$.

ii) Αν το σώμα Σ, μετά την κρούση ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος, θα έχει και τη μέγιστη δυνατή ενέργεια ταλάντωσης. Όμως η ενέργεια θα γίνει μέγιστη, αν το σώμα $Σ_1$ παραμείνει ακίνητο μετά την κρούση, οπότε όλη η αρχική του κινητική ενέργεια, μεταβιβαστεί στο σώμα Σ. Αλλά τότε από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας για την ελαστική κρούση (πριν και μετά), παίρνουμε:

$$K_{\Sigma,\pi\rho\iota\nu} + K_{\Sigma_1,\pi\rho\iota\nu} = K_{\Sigma,\mu\varepsilon\tau} + K_{\Sigma_1,\mu\varepsilon\tau} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 \quad (1)$$

Αλλά αν η κρούση των σωμάτων έγινε σε απομάκρυνση x_1 από τη θέση ισορροπίας, ενώ το σώμα Σ έχει ταχύτητα $υ_1$, τότε πριν την κρούση το σώμα Σ είχε ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (2)$$

Ενώ μετά την κρούση, ξεκινά την νέα του ταλάντωση με την ίδια απομάκρυνση x_1, έχοντας ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow$$

$$E_2 = \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right) + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}5^2 J + \frac{1}{2}4 \cdot 2^2 J = 12{,}5J + 8J = 20{,}5J$$

iii) Για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά τις κρούσεις ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 \quad (\alpha) \qquad \upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \quad (\beta)$$

Με αντικατάσταση στην (β) $\upsilon_2'=0$ και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, παίρνουμε:

$$0 = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \rightarrow \upsilon_1 = -\frac{M-m}{2m}\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = -\frac{M-m}{2m}\upsilon_2 = -\frac{4-1}{2\cdot 1}(-2)m/s = 3m/s$$

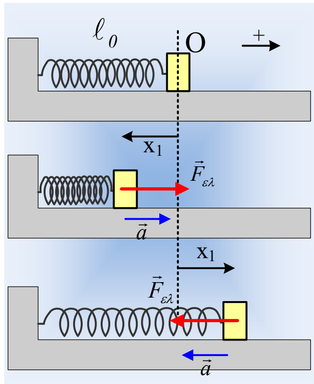
Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση (α) παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 = \frac{1-4}{1+4}3m/s + \frac{2\cdot 4}{1+4}(-2)m/s = -5m/s$$

iv) Χρησιμοποιώντας την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης, πριν την κρούση, (σχέση (1)), παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$

$$|x_1| = \sqrt{A^2 - \frac{m}{k}\upsilon_1^2} = \sqrt{0{,}5^2 - \frac{1}{100}3^2}\,m = 0{,}4m$$



Το σώμα Σ δηλαδή πριν την κρούση απείχε 0,4m από τη θέση ισορροπίας του, συνεπώς βρισκόταν σε απομάκρυνση x_1=-0,4m ή σε απομάκρυνση x_1=0,4m, κινούμενο προς τα δεξιά (βλέπε σχήμα). Αλλά τότε:

α) Αν το σώμα βρίσκεται αριστερά της θέσης ισορροπίας Ο, έχει επιτάχυνση:

$$\alpha = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = \frac{-kx_1}{m} = \frac{-100(-0{,}4)}{1}m/s^2 = +40m/s^2.$$

β) Αν βρίσκεται δεξιά της θέσης ισορροπίας, τότε:

$$\alpha = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = \frac{-kx_1}{m} = \frac{-100\cdot 0{,}4}{1}m/s^2 = -40m/s^2.$$

Σχόλια:

1) Η εξίσωση (3) μας λέει ουσιαστικά, ότι η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση, είναι ίση με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης συν την ενέργεια που πήρε το σώμα κατά τη διάρκεια της κρούσης, η οποία στην περίπτωσή μας είναι η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_1$.

2) Η επιτάχυνση του σώματος πριν την κρούση, θα μπορούσε να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας και την εξίσωση $\alpha = -\omega^2 x$, η οποία συνδέει την επιτάχυνση με την απομάκρυνση του σώματος που εκτελεί ΑΑΤ.

dmargaris@gmail.com